

在位姿估计中. 运动方程与观测方程是非线性的.

BA: 三维光心约束

相机投影过程:

$$P = R p + t$$

归一化 P' 得 P_c

消除畸变得像素坐标

此过程写作观测方程 $h(x, y)$

x 为 R, t 组成的外参矩阵

y 为三维点 P , 输出为像素坐标

误差 $e = z - h(x, y)$

R, t 的变换设为 T

求解 e 的偏导, 利用 MSE 损失方法得

$$Loss(e) = \frac{1}{2} \|d(x + \Delta x)\|^2 \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|e_{ij} + F_{ij} \Delta \xi_i + E_{ij} \Delta p_j\|^2$$

ξ 为李代数.

F_{ij} 为在 $Loss$ 下对相机姿态的偏导 E_{ij} 为函数为 P 的偏导, 即

$F = \frac{\partial L}{\partial T}$, L 与 T 为矩阵, 利用链法有:

$$F_{ij} = \frac{\partial L}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial R_i} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t_i} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial p}$$

证: 由李代数知 $R = e^{\phi^{\wedge}} = \exp(\phi^{\wedge})$ ($\phi^{\wedge}$ 为 ϕ 的反对称)

$$E = \frac{1}{2} \|z - h(R, t, p)\|^2$$

$$e_{ij} = z_{ij} - h(R_i, t_i, p_j)$$

由左扰模型得:

$$R' = R \exp(\phi^{\wedge})$$

$$\exp(\phi^{\wedge}) \approx \Delta \phi^{\wedge} + I$$

$$\therefore R' = R \Delta \phi^{\wedge} + R$$

$$\text{由 } d(R_i, t_i, p_j) = k \frac{R_i p_j + t_i}{(R_i p_j + t_i) \cdot z}$$

代入 R' 得

$$d(R'_i, t_i, p_j) = d(R_i + R_i \Delta \phi^{\wedge}, t_i, p_j)$$

对误差求 R 的偏导

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial \Delta \phi^{\wedge}} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \Delta \phi^{\wedge}} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial R_i} \cdot 1 \quad \left(\frac{\partial R_i}{\partial \Delta \phi^{\wedge}} = \frac{dR_i}{d\Delta \phi^{\wedge}}, R' = R \Delta \phi^{\wedge} + R, \text{ 故为 } 1 \right)$$

$$\text{而 } \frac{\partial h}{\partial R_i} = k$$

$$\therefore \frac{\partial e_{ij}}{\partial \Delta \phi^{\wedge}} = k \frac{\partial e_{ij}}{\partial h}$$

由需求可知, 应令 $\nabla E = 0, \frac{\partial E}{\partial x} = 0$

$$\nabla E = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \sum_i e_i(x)^T e_i(x) \right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial e_i(x)^T}{\partial x} e_i(x) + e_i(x)^T \frac{\partial e_i(x)}{\partial x} \right)$$

由于 $e_i(x)$ 为向量则 $\frac{\partial e_i(x)}{\partial x}$ 为 e 的雅可比

$$\text{则 } \nabla E(x) = \sum_i J_i(x)^T e_i(x)$$

令微元 Δx

$$E(x + \Delta x) \approx E(x) + \nabla E(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x \quad (\text{Taylor 展开})$$

其中 $H = J^T J$ (海森矩阵)

欲令 $\nabla E = 0$, 则 $\nabla E(x + \Delta x) = 0, J^T e(x) + H \Delta x = 0$

$$\text{则 } H \Delta x = -J^T e(x) = g$$

由 J 的组成可知, $H = J^T J$

$$\text{令 } T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad \xi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad T \text{ 为变换阵, } \xi \text{ 为位姿变化}$$

u 为旋转分量, v 为平移分量

$$\text{则 } E = \frac{1}{2} \|d(x + \Delta x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|e_{ij} + F_{ij} \Delta \xi_i + E_{ij} \Delta p_j\|^2$$

F_{ij} 为 ξ_i 的导数

E_{ij} 为 p_j 的导数

$$\therefore H = \begin{bmatrix} F^T F & F^T E \\ E^T F & E^T E \end{bmatrix}$$

由左扰模型得 F 与 E 表达式, $T \exp(\Delta \xi) = T + T \Delta \xi^{\wedge}$

$$F = \frac{\partial e}{\partial \xi} = \frac{\partial e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial e}{\partial T}$$

$$E = \frac{\partial e}{\partial p} = \frac{\partial e}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial p} \quad \pi \text{ 为世界坐标到像素坐标的函数}$$

单目深度恢复：
得到本质矩阵后利用位姿求深度。

李群与李代数：群：一类元与元之间运算组成的集合，通俗理解就是有同种性质的集合

SO(3)：3维旋转群

SE(3)：3维欧氏群，既R与t

李群与李代数可以互相转化，比如：

$$SO(3) = \begin{pmatrix} \omega_x & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad SE(3) = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则其李代数为反对称矩阵，姑且写作 $\phi^\wedge$

$$\phi^\wedge = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

SE(3)的李代数写作 $\xi^\wedge$ ，既

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ω 为旋转部分， v 为平移部分

反之，已知李代数求李群可以通过

$$R = SO(3) = \exp(\phi^\wedge)$$

$$T = SE(3) = \exp(\xi^\wedge)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(\omega) & Jv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

李括号为李群的算符，写作：

$$[a, b] = (ab - ba)^\vee \quad (\vee \text{ 为求反对称})$$

因指数次矩阵可以被 Taylor，所以李代数求李群可以 Taylor

对 SO(3)，令李代数 $\phi = \theta a$ a 为 $\|a\|=1$ 的方向向量， θ 为弧度

$$a a^\wedge = a a^\top - I, \quad a^\wedge a^\wedge a^\wedge = -a^\wedge$$

$$\exp(\phi^\wedge) = \exp(\theta a^\wedge) \quad \text{展开化简有：}$$

$$= \cos \theta I + (1 - \cos \theta) a a^\top + \sin \theta a^\wedge$$

$$SE(3) \text{ 同理 } \exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\omega) & Jv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 J 展开

$$J = \frac{\sin \theta}{\theta} I + (1 - \frac{\sin \theta}{\theta}) a a^\top + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} a^\wedge$$

$\exp(\omega)$ 利用 Taylor 求三项即可近似

左扰模型：设空间点 P ， $\frac{\partial RP}{\partial R}$ 既 $\frac{\partial RP}{\partial \phi}$

$$\text{有 } \frac{\partial RP}{\partial \phi} = -(Rp)^\wedge$$

$$\text{可以简写为：} R' = \exp(\Delta \phi^\wedge) R \quad R \in SO(3)$$

$$T' = \exp(\xi^\wedge) T \quad T \in SE(3)$$

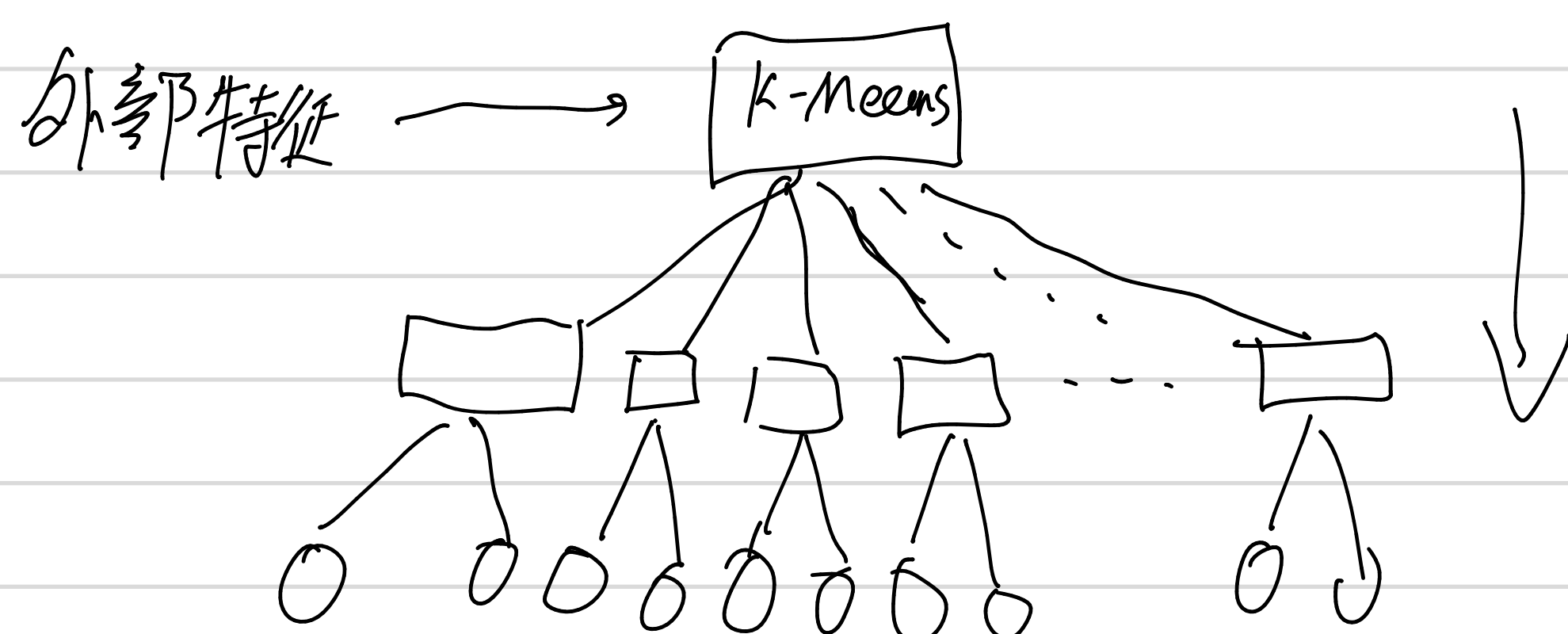
如何绘制运动迹：在求出本质矩阵后，可以恢复两帧间的 R 与 t ，绘制既可，而 BA 可以优化像素所在位置，提供高精度的图像

回环检测：

判断回环其实就是一个机器学习过程，可以通过聚类算法实现。

比如有 N 个特征点，利用 K-means 初步分类，对每类分别聚类。

通过此法，对于某一刻，如果与叶节点的相似度过高，即可判断为回环。



则目前的关键在于相似度. 最直接, 可以使用 L1 范数

$$S(A, B) = \|A\| + \|B\| - \|A - B\|$$
$$= 2 \sum_{i=1}^N |V_{A_i}| + |V_{B_i}| - |V_{A_i} - V_{B_i}|$$

如果有必要也可以使用余弦相似度.

双目建图:

每个图都有自己的点云. 利用 R 与 t 组成的 $Se(3)$ 矩阵 T , 计算 $T * \text{当前点云}$, 就可以得到相对于前一时刻的信息了. 既 $\text{world} = T * \text{point cloud}$;

在经过外点去除或降采样进行滤波既可以得到场景点云.

点云信息过多, 为了节约地图体积, 故使用建图法进行融合

八叉树: 对于地图, 相似信息过多会被视为一个体素, 体素大小可以从大到小分八种, 既分辨率.

点云库: PCL

向量间求导 既各项分别导:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_n} \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$